Concours Commun I.N.A. - E.N.S.A.

1985

ÉPREUVE DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES ET PHYSIQUE

(Option générale et option agronomie)

Durée : 4 heures

PREMIÈRE PARTIE

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES MATHÉMATIQUES

Durée : 1 h 30

N.B. — *Les candidats sont priés :*

1° *D'écrire très lisiblement, de soigner la rédaction et la présentation matérielle. Il convient de numéroter les diverses questions en les séparant très nettement,* de respecter les notations de l'énoncé.

2° *De donner les explications nécessaires et suffisantes en faisant figurer sur la copie tous les calculs intermédiaires.*

3° *De donner les résultats encadrés.*

EXERCICE 1

L'activité d'une population microbienne évolue en fonction du temps sous l'effet d'un traitement. On veut étudier une relation entre le rapport A de l'activité à un moment donné à l'activité initiale, et le temps T. Un procédé permet de mesurer l'activité a_k par un réel de [0,1] à dix moments distincts t_k (exprimés en jours) pour k entier naturel compris entre 1 et 10.

Une étude graphique conduit à étudier le logarithme népérien de A en fonction du temps. Soit B = ln A (où ln désigne le logarithme népérien).

1. Donner les formules permettant de calculer les coefficients α (coefficient directeur) et β (ordonnée à l'origine) de la droite de régression de B en T en fonction des nombres $b_k = \ln a_k$ et t_k.

   Le calcul a donné : $\alpha = -0{,}25$ et $\beta = -0{,}15$.

2. En déduire une relation $A = f(T)$.

3. Quelle est la valeur du rapport de l'activité que l'on peut s'attendre à trouver à l'instant T = 5 ? (On en donnera une valeur approchée décimale.)

EXERCICE 2

Un éleveur possède un troupeau de 150 vaches qu'il veut répartir dans deux étables A et B pouvant chacune accueillir la totalité du troupeau. Pour ne pas « traumatiser » ses bêtes, il décide de ne pas leur imposer une étable; les bêtes se répartissent de façon équiprobable et indépendante dans l'une ou l'autre des étables. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de vaches choisissant l'étable A.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. Donner, après justification, une approximation de la probabilité de l'événement : « le nombre de vaches choisissant A est supérieur ou égal à 80 ».

3. Momentanément, pour raison de travaux, chaque étable ne comporte que N places disponibles (N $\in$ [75, 150]).

   a. Exprimer à l'aide de X et N l'événement $\mathcal{E}$: « Toutes les vaches trouvent une place ».

   b. Déterminer la valeur minimale de N pour que la probabilité de $\mathcal{E}$ soit supérieure à 0,9.

EXERCICE 3

On veut tester l'efficacité d'un nouveau traitement en mesurant la durée de survie de souris atteintes par la maladie. On suppose que cette durée de survie est une variable aléatoire obéissant à une loi normale. Un premier échantillon de 9 souris est soigné à l'aide de l'ancien traitement et un autre d'effectif 12 avec le nouveau.

Pour le premier échantillon, on a obtenu une moyenne m_1 égale à 21 jours et $\sum_{k=1}^{k=9} (d_k - m_1)^2 = 27$ (où d_k représente la durée de survie en jours de la $k^{\text{ième}}$ souris du premier échantillon).

Pour le deuxième échantillon, on a obtenu une moyenne m_2 égale à 24 jours et $\sum_{h=1}^{h=12} (D_h - m_2)^2 = 35$ (où D_h représente la durée de survie en jours de la $h^{\text{ième}}$ souris du deuxième échantillon).

1. Donner une estimation de la variance de chacune des populations. Calculer leur rapport. On supposera pour la suite ce rapport égal à 1.

2. Peut-on affirmer en prenant un risque de 5 % qu'il y a une différence significative entre les deux traitements?

   (On justifiera la méthode et on précisera les formules utilisées).